

Rapidity (ラピディティ) y と Pseudorapidity η の定義と性質

- ・粒子の Rapidity y は正式には longitudinal rapidity と呼び

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + P_{\parallel}}{E - P_{\parallel}} \right) = \ln \left(\frac{E + P_{\parallel}}{\sqrt{P_T^2 + m^2}} \right)$$

で定義される。ここで

y	rapidity
E	粒子のenergy
$P_{\parallel} = P \cos \theta$	粒子の縦(z)方向のmomentum
$P_T = P \sin \theta$	粒子の横(xy)方向のmomentum
m	粒子のmass

である。この変数 y は粒子の縦方向と横方向を分離して記述するのに便利で、粒子の質量に関わらず

$$\frac{dP_{\parallel}}{E} = dy$$

が成り立ち、したがって粒子の Phase Space $\frac{dP_x dP_y dP_z}{E}$ が rapidity y に比例することがわかる。

z 方向の Lorentz 変換 ($\gamma = \cosh \Delta$, $\beta = \tanh \Delta$) に対しては

$$\begin{aligned} y \rightarrow y' &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E' + P'_{\parallel}}{E' - P'_{\parallel}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\gamma E - \beta \gamma P_{\parallel}) + (\gamma P_{\parallel} - \beta \gamma E)}{(\gamma E - \beta \gamma P_{\parallel}) - (\gamma P_{\parallel} - \beta \gamma E)} \right) \\ &= y + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \equiv y + \Delta \end{aligned}$$

となり、rapidity の値は定数 Δ の差に帰する。粒子がとりうる最大の rapidity は、重心系で $E_{\max} = \sqrt{s}/2$ だから

$$y_{\max}^{CM} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{\sqrt{s}}{2} + \sqrt{\frac{s}{4} - m^2}}{\frac{\sqrt{s}}{2} - \sqrt{\frac{s}{4} - m^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\frac{\sqrt{s}}{2} + \sqrt{\frac{s}{4} - m^2})^2}{m^2} \right) \approx \ln \frac{\sqrt{s}}{m}$$

となり粒子によって y の kinematical limit がちがう。

・粒子の種類(質量)が分からないときは pseudorapidity η を使う . y の定義式に $m=0$ を入れて

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + E \cos \theta}{E - E \cos \theta} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\tan^2(\theta/2)} \right) = -\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

で与えられる . ここで θ は粒子の発生角度(天頂角)である。コライダー実験ではこの η が頻繁に使われる。この式から逆に θ は

$$\theta = 2 \arctan(e^{-\eta})$$

で与えられる。この式を使えば rapidity と角度の関係がすぐ計算できて

pseudorapidity η	polar angle	の本当の rapidity y		
		$p=1 \text{ GeV}/c$	$10 \text{ GeV}/c$	$100 \text{ GeV}/c$
0	90 °	0.00	0.000	0.000
1	40.395 °	0.983	1.000	1.000
2	15.415 °	1.883	1.999	2.000
3	5.700 °	2.459	2.990	3.000
4	2.099 °	2.633	3.932	3.999
5	0.772 °	2.662	4.635	4.995
-1	139.605 °	-0.983	-1.000	-1.000
-2	164.585 °	-1.883	-1.999	-2.000
-5	179.228 °	-2.662	-4.635	-4.995

となる。粒子の質量がノンゼロの場合は、rapidity と pseudorapidity に違いが出てくる。一例として pion (質量 $0.1397 \text{ GeV}/c^2$) の場合の本当の rapidity y の値を表に載せた。

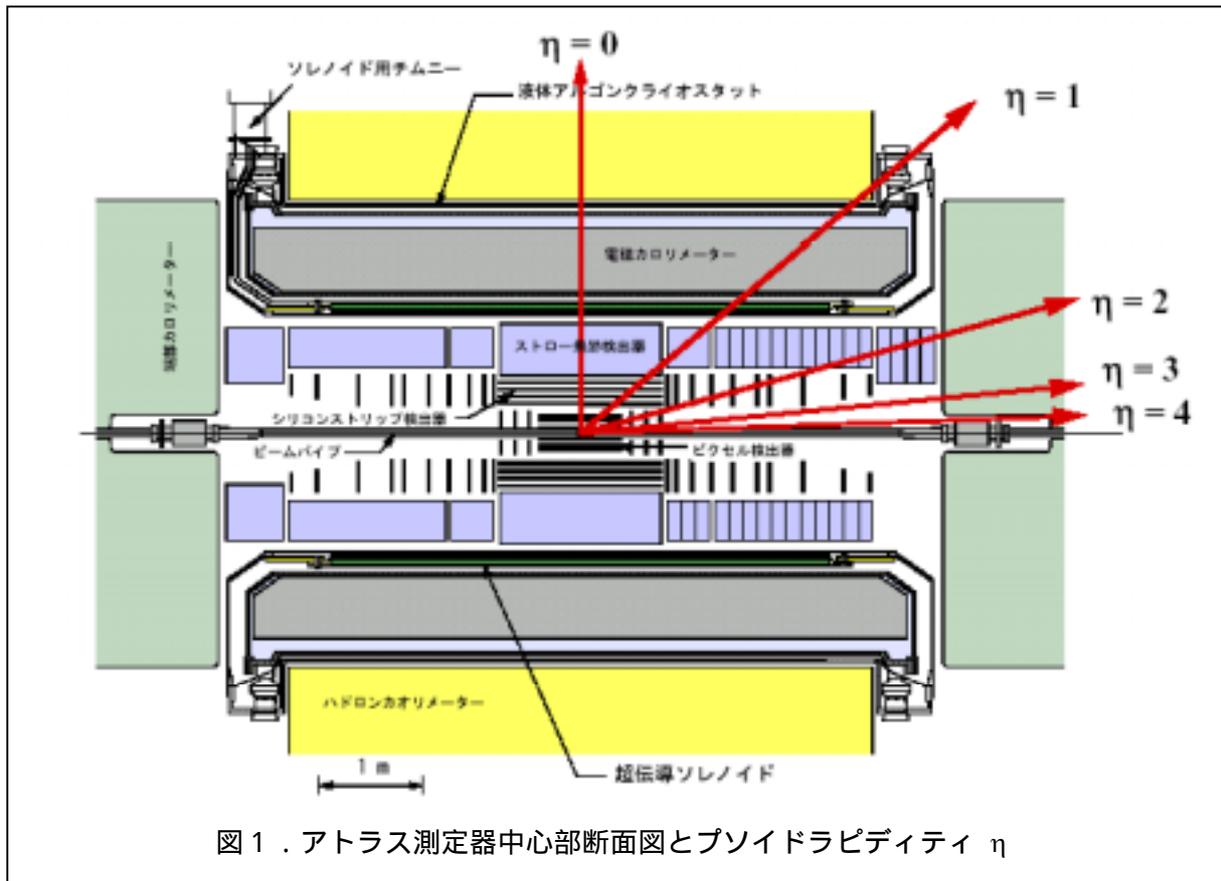


図 1 . アトラス測定器中心部断面図とプソイドラピディティ η

LHC での陽子陽子衝突で発生する pion などの軽い粒子の pseudorapidity の分布は、 $\eta = -3 \sim 3$ でほぼ平らであり、rapidity あたり 6 個ほどの粒子が発生する。実際、Pythia 6 を使って 14TeV の陽子陽子衝突で発生する荷電粒子の分布を取ってみると、図 2 のようなラピディティ分布になる。重い粒子 (例えば Higgs 粒子) は $\eta = 0$ 付近のみ分布する。

(2003.4.26 T. Kondo 記)

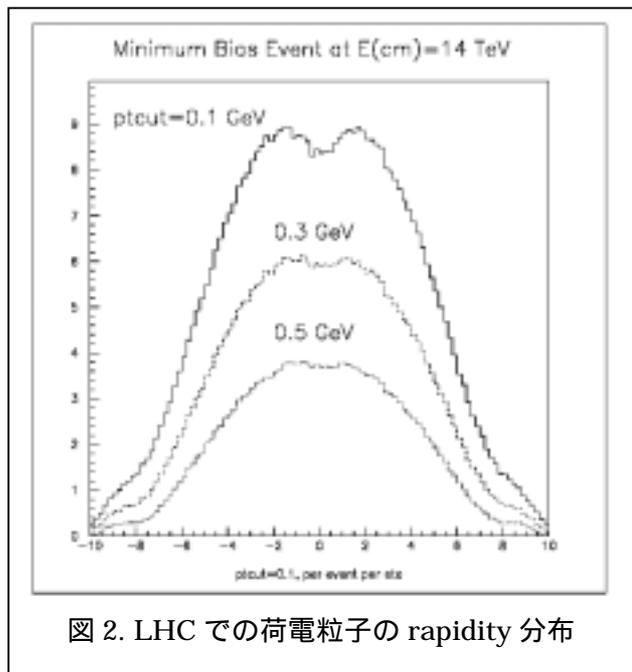


図 2. LHC での荷電粒子の rapidity 分布